Кодовая конструкция для систем MIMO, основанная на подмножестве строк матрицы Адамара

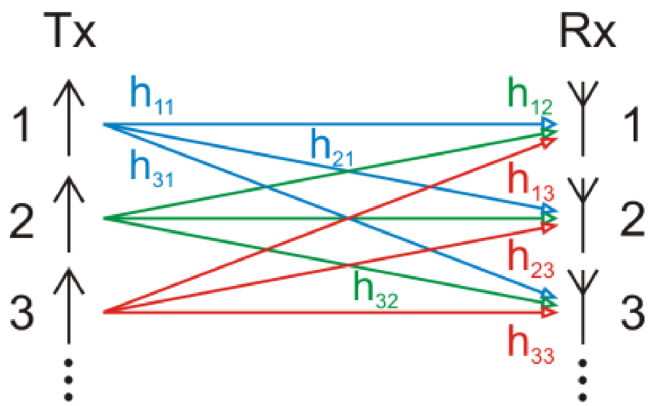
Крещук А. А.
ИППИ РАН, МФТИ
krsch@iitp.ru

Аннотация

В данной работе предлагается новая кодовая конструкция для систем с несколькими передающими антеннами и несколькими принимающими (MIMO). Информация о состоянии канала считается известной принимающей стороне, но не передающей. Коэффициенты передачи статистически независимы для всех пар передающей и принимающей антенн. Данный код не является строго алгебраически декодируемым, однако при отсутствии глубоких замираний на каждом канале его можно однозначно декодировать. Кроме того, учёт ортогональности позволяет ускорить процедуру декодирование методом максимального правдоподобия. Моделирование показывает близкую к оптимальной корректирующую способность предлагаемой кодовой конструкции при использовании 4 передающих и 4 принимающих антенн.

1. Постановка задачи

Современные стандарты связи используют несколько приёмо-передающих антенн. Это позволяет им не только повышать скорость передачи данных, но и работать при достаточно низком соотношении сигнал/шум (SNR). В случая наличия достоверной информации о канале для достижения этих целей используют формирование пучка (beamforming). Однако часто у передатчика отсутствует достоверная информация о канале. В этом случае многие исследователи предлагают использовать пространственно-временные коды (STC - space time code). Для декодирования таких кодов используется метод максимального правдоподобия, требующий знание приёмником полной информация о канале. В работах [3][5] рассматриваются коды со скорость 1. В данной работе рассматривается код со скоростью меньше единицы, но обладающей высокой корректирующей способностью.



2. Канал связи

В работе рассматривается передача данных от передатчика к приёмнику без обратной связи с использованием N_{tx} (N_{tx}>1) передающих антенн и N_{rx} ($N_{rx} \geq 1$) принимающих. Предполагается, что приёмник обладает достоверной информацией о канале, а передатчик - нет. Сигнал на приёмнике представляется в виде следующей формулы:

$$r_t^j = \sum_{i=0}^{N_{tx}} \alpha_{ij} s_t^i + \eta_t^j$$

где s_t^i - символ переданный i-ой антенной в момент времени t, r_t^j - символ, полученный j-ой антенной в момент времени t, η_t^j - независимые реализации белого гауссово шума и α_{ij} - ослабление сигнала между i-ой передающей и j-ой принимающей антеннами. Коэффициенты α_{ij} попарно статистически независимы и имеют распределение Релея.

Число независимых путей распространения сигнала называется порядком разнесения. В нашей модели он равен $N_{rx} * N_{tx}$.

3. Кодовая конструкция

$H = \|\vec{h}_1 \vec{h}_2 ... \vec{h}_i ... \vec{h}_L\|$ - матрица Адамара размера L*L ($L > N_{tx}$), а $\vec{h}_i$ - i-ый её столбец. Тогда все кодовые слова будут представлены в виде $c(i_1 i_2 ... i_{N_{tx}}) =$

$\|\vec{h}_{i_1}\vec{h}_{i_2}...\vec{h}_{i_{N_{tx}}}\|$. В случае $N_{tx}=2$ (две передающие антенны), кодовые слова имеют вид $c_{ij}=\|\vec{h}_i\vec{h}_j\|, i\neq j$. Входной алфавит кодера является множеством вектором $(i_1...i_L)$. Два входных вектора будет считать эквивалентными, если один получается из другого какой-либо перестановкой компонент. Потребуем, чтобы коду не принадлежали эквивалентные слова. В качестве примера построим код для $N_{tx}=3$ и $L=8$. Матрица Адамара размера 8

$$H=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

Примерами кодовых слов являются:

$$C_{123}=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 \end{Vmatrix} C_{258}=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$$

$$C_{356}=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix} C_{678}=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

Построим разность двух кодовых слов

$$B(c,e)=\begin{Vmatrix} c_1^1-e_1^1 & c_1^2-e_1^2 & \cdots & c_1^{N_{tx}}-e_1^{N_{tx}}\\ c_2^1-e_2^1 & c_2^2-e_2^2 & \cdots & c_2^{N_{tx}}-e_2^{N_{tx}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_L^1-e_L^1 & c_L^2-e_L^2 & \cdots & c_L^{N_{tx}}-e_L^{N_{tx}} \end{Vmatrix}$$

Данная матрица не всегда будет иметь полный ранг, однако произведение $B(c,e)A\neq 0$, при условии $\alpha_i\neq 0\,\forall i$, то есть при отсутствии замираний в канале.

3.1. Выбор кодовых слов

Для удобства обозначим кодовое слово $C_{i_1i_2...i_{N_{tx}}}=(i_1,i_2,...,i_{N_{tx}})$. Если $i_a\neq i_b, \forall a\neq b$, то столбцы кодового слова ортогональны. Назовём код, в котором каждое кодовое слово имеет ортогональные столбцы, *ортогональным*. Как будет показано далее, в таком случае можно будет использовать быстрый алгоритм декодирования.

Таким образом, мы поставили в соответствие коду $C_{i_1i_2...i_{N_{tx}}}$ некоторый код длины N_{tx} над алфавитом из L элементов. Назовём его *индексным* кодом кода $C_{i_1i_2...i_{N_{tx}}}$. Заметим, что индексный код так же устойчив к перестановкам, то есть никакие два слова не должны получаться друг из друга перестановкой элементов, или любый два слова должны иметь разный набор элементов. Слова, не удовлетворяющие указанному критерию, назовём эквивалентными.

Для выбора кодовых слов мы можем в каждом наборе эквивалентных слов выбрать по одному слову так, чтобы каждый элемент встречался одинаково часто в каждой позиции. В качестве примера возьмём $L=8$ и $N_{tx}=2$. Тогда кодовое слово будет состоять из двух элементов. Используем следующей критерий: из двух эквивалентных пар выберем ту, в которой первый элемент меньше второго, если их чётность различается, и ту, в которой первых элемент больше второго, если их чётность совпадает. Слова, в которых элементы равны между собой, мы отбросим. Этот критерий даёт нам 28 кодовых слов. Для примера, элемент 3 будет встречаться в следующих кодовых словах: (3,0), (1,3), (3,2), (4,3), (3,5), (6,3), (3,7). Здесь элемент 3 встречается 4 раза на первой позиции и 3 раза на второй. Несложно проверить, что каждый элемент поля также встречается одинаково часто на различных позициях в слове (с точностью до 1 раза). Этот критерий обеспечивает наибольшее среднее расстояние между кодовыми словами из всех кодов максимального размера, но к сожалению, он не обобщается на случай $N_{tx}>2$.

Более универсальным критерием является выбор кода длины N_{tx} над полем $GF(L)$, в котором из каждого набора эквивалентных кодовых слов случайным образом выбрано одно. В этом случае мы можем выбрать код, который исправляет заданное число стираний (в нашей модели это число глубоких замираний канала), но при этом теряем в скорости. Например, код длины 4 над полем $GF(8)$, заданный своей проверочной матрицей $G=\|1\,1\,1\,1\|$, будет иметь лишь 50 кодовых слов. Данный код является подмножеством (4,3,2) укороченного кода Рида-Соломона. Аналогичный код длины 8 над полем $GF(16)$ с $G=\|11111111\|$ содержит 30954 слова, а значит его скорость приблизительно равна $15/16$. Недостатком такого метода является неортогональность полученного кода.

Создание ортогонального кода максимального размера с заданным кодовым расстоянием является более трудной задачей. Алгоритмы создания таких кодов будут описаны в [1].

4. Декодирование

Рассмотрим алгоритм декодирования методом максимального правдоподобия. В этом случае приёмник вычисляет значение метрики

$$M(r_t^j,\alpha_{ij},c_t^i)=\sum_{j=0}^{N_{rx}}\sum_{t=0}^{L}\left|r_t^j-\sum_{i=0}^{N_{tx}}\alpha_{ij}c_t^i\right|^2 \qquad (1)$$

для всех кодовый слов c_t^i и выбирает кодовое слово, дающее минимальное значение данной метрики.

Если используется ортогональный код, эту метрику можно переписать в более простом виде с помощью подхода, описанного в [5]:

$$M(r_t^j,\alpha_{ij},c_t^i)=\sum_{i=0}^{N_{tx}}\sum_{t=0}^{L}\left|h_t^i-\sum_{j=0}^{N_{rx}}\alpha_{ij}^*r_t^j\right|^2 + \left(-1+\sum_{j=0}^{N_{tx}}\left|\alpha_{ij}\right|^2\right)\left|h_t^i\right|^2+const$$

Здесь h_t^i - элемент (t,i) матрицы Адамара. Если учесть, что $|h_t^i|=1$, то метрика становится равной

$$M(r_t^j,\alpha_{ij},c_t^i)=\sum_{i=0}^{N_{tx}}\sum_{t=0}^{L}\left|h_t^i-\sum_{j=0}^{N_{rx}}\alpha_{ij}^*r_t^j\right|^2+const \qquad (2)$$

Таким образом, для ортогонального кода возможно независимо проводить демодуляцию каждого символов по формуле 2. Для неортогонального кода функция правдоподобия (1) не представляется в виде суммы функций правдоподобия отдельных символов, что требует проведения демодуляции для всего слова в целом.

4.1. Каскадные коды

Предложенную кодовую конструкцию можно использовать в качестве внутреннего кода каскадного кода. В этом случае для её декодирования можно использовать декодер с мягким решением. В таком случае выходом декодера является логарифм значения функции правдоподобия для всех кодовых слов с точностью до аддитивной константы.

5. Корректирующая способность

Для оценки вероятности ошибки на выходе декодера, максимизирующего правдоподобие, можно применить формулу[4]

$$P(s\longrightarrow\tilde{s})\leq\left(\frac{1}{\prod_{j=1}^{r}\left(1+\frac{\lambda_jE_s}{4N_0}\right)}\right)^{N_{rx}} \qquad (3)$$

где s и $\tilde{s}$ - два различных кодовых слова (матрицы LxN_{tx}), λ_j и r - собственные числа и ранг матрицы $(s-\tilde{s})(s-\tilde{s})^H$ соответственно, а E_s/N_0 - отношение сигнал/шум.

При малых отношениях сигнал/шум формула 3 преобразуется в

$$P(s\longrightarrow\tilde{s})\leq\frac{1}{1+\left(\frac{E_s}{4N_0}\right)\sum_{i=1}^{r}\lambda_i} \qquad (4)$$

Здесь $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i$ - это квадрат эвклидова расстояния между кодовыми словами s и $\tilde{s}$.

Оценим эвклидово расстояние между кодовыми словами предложенной кодовой конструкции. Эвклидово расстояние между двумя различными столбцами матрицы Адамара размера LxL равно $\sqrt{2L}$. Тогда эвклидово расстояние между двумя кодовыми словами равно $d\sqrt{2L}$, где d - расстояние Хэмминга между эквивалентными указанным кодовыми словами длины N_{tx} над полем $GF(L)$, описанными в разделе 3.1.

Для сравнения найдём эвклидово расстояние обобщённого действительного ортогонального кода, предложенного в [5], при использовании bpsk модуляции. Изменение одного символа приводит к изменению N_{tx} символов (в оригинальных обозначениях n символов). Таким образом эвклидово расстояние между кодовыми словами изменяется от N_{tx} до $N_{tx}*L$.

6. Результаты моделирования

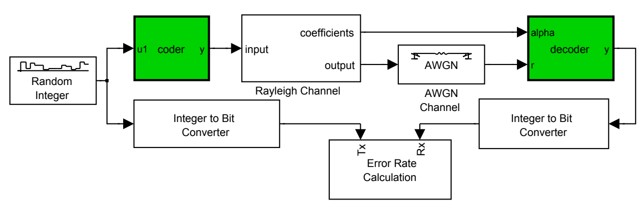


Рис. 1. Модель в Simulink

Для моделирования был выбраны неортогональный код, содержащий 50 кодовых слов и являющийся подмножеством укороченного кода Рида-Соломона (4,3,2) (см. раздел 3.1), и ортогональный код, содержащий 64 слова, построенный по методике из [1]. Таким образом, количество передающих антенн N_{tx} было зафиксировано на 4х, а количество приёмных N_{rx} изменялось от 1 до 4. $L=8$. Для декодирования обоих кодов использовалась формула 1.

Моделирование было проведено в среде Simulink. Выход генератора комплексного коэффициента затухания канала (см. рис. 1) умножается на кодированный сигнал, а затем суммируется с

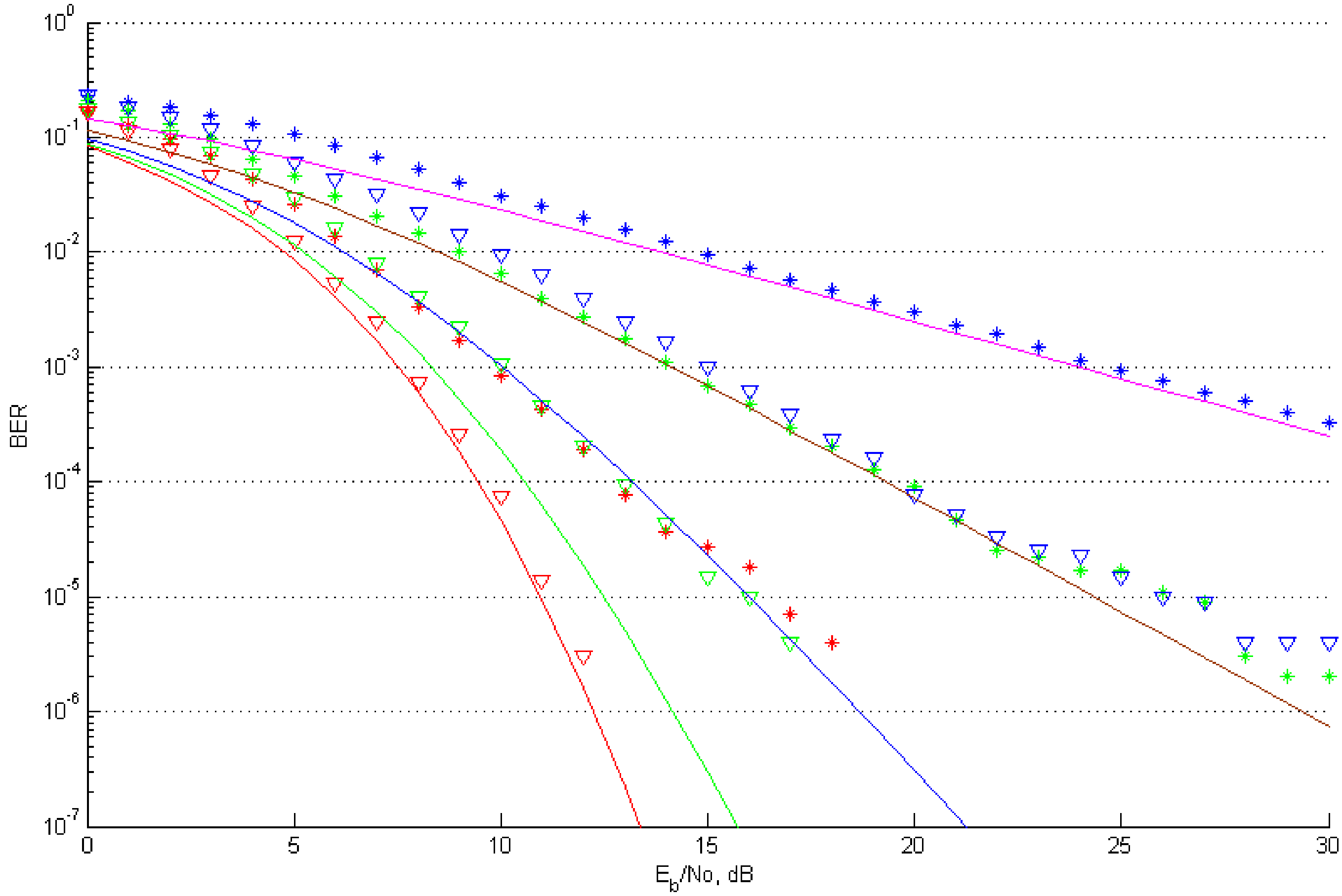


Рис. 2. Результаты моделирования

гауссовым шумом. В качестве модели канала был выбран рэлеевский канал.

Результат представлен на рис. 2. Одинаковым цветом обозначены результаты, соответствующие одинаковым порядкам разнесения. Звёздочками обозначены результаты моделирования для неортогонального кода, а треугольниками - для ортогонального. Сплошными линиями обозначены теоретические оценки вероятности ошибки для bpsk модуляции в рэлеевском канале[2]. Синий, зелёный и красный цвета соответствуют 1,2 и 4 принимающим антеннам (порядок разнесения 4,8 и 16). Розовым цветом обозначен порядок разнесения 1, а коричневым - 2.

Таким образом моделирование показало необходимость использования ортогонального кода, а также приближение к теоретической его корректирующей способности при увеличении числа приёмных антенн.

7. Вывод

В работе предложена новая кодовая конструкция для систем MIMO, которую можно построить для любого числа приёмных и передающих антенн. С помощью моделирования показано, что корректирующая способность в случае 4 принимающих и 4 передающих антенн близка к оптимальной.

Список литературы

[1] Давыдов А.А., Зяблов В.В., and Крещук А.А. Коды, свободные от перестановок символов. В процессе подготовки.

[2] Прокис Дж. *Цифровая связь*, chapter 14.4. Радио и связь, 2000.

[3] Siavash M. Alamouti. A simple transmit diversity technique for wireless communications. *IEEE Journal on Select Areas in Communications*, 16(8), OCTOBER 1998.

[4] Paul James Lusina. *Algerbaic Designs of Space Time Codes*. PhD thesis, University of Ulm, 2003.

[5] Vahid Tarokh, Hamid Jafarkhani, and A. R. Calderbank. Space–time block codes from orthogonal designs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(5), July 1999.